

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2022

Διδάσκοντες: Α. ΤΟΛΙΑΣ, Χ. ΣΑΡΟΓΛΟΥ

Θέμα 1. [1,5 μον.]

Να λυθεί η εξίσωση $\cos^4 x - \sin^4 x - 2 \cos x - \frac{1}{2} = 0$. (Υπόδειξη: Μπορείτε να εφαρμόσετε διαφορά τετραγώνων στους δύο πρώτους όρους).

Θέμα 2. [1,5 μον.]

Να εξεταστεί αν η $[(p \vee q) \wedge (\sim (p \wedge q))] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (\sim q)]$ είναι ταυτολογία.

Θέμα 3. [1,5 μον.]

Δίνονται δύο σύνολα X, Y . Να δείξετε ότι $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

Θέμα 4. [1,5 μον.]

Στο σύνολο $E = \{a, b, c, d, e\}$ να ορίσετε μια σχέση μερικής διάταξης \leq (καταγράφοντας το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που την αποτελούν) η οποία να έχει μέγιστο στοιχείο το a , να έχει ακριβώς δύο ελαχιστικά (minimal) στοιχεία, τα d, e και να ισχύει $b \leq c$.

Θέμα 5. [1,5 μον.]

Έστω $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ μια συνάρτηση.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $X, Y \subseteq \Gamma$ ισχύει $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

(β) Αν η f είναι 1-1, να δείξετε ότι για κάθε $X, Y \subseteq \Gamma$ ισχύει $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Θέμα 6. [1,5 μον.]

Να διατυπώσετε (χωρίς να αποδείξετε) το θεώρημα της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς. Με βάση αυτό να αποδείξετε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ τότε υπάρχουν άπειροι ρητοί στο διάστημα (x, y) . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε απαγωγή σε άτοπο.)

Θέμα 7. [1,5 μον.]

Να διατυπώσετε (χωρίς να αποδείξετε) το θεώρημα Schröder-Bernstein και χρησιμοποιώντας το να δείξετε ότι $[0, 1] \cup (2, 3) \cup [7, 9] \simeq [0, 10]$.

Καλή επιτυχία!